

# PROBLEMES DE DYNAMIQUE ET DE COMMANDE DES AVIONS VTOL GUIDAGE OPTIMAL ET STABILITE

T. HACKER

*Chef du Laboratoire de Dynamique des Vols, Division Aeromécanique  
Institut de Mécanique Appliquée de  
l'Académie de la République Populaire Roumaine*

## EXTRAIT

La première partie concerne le guidage optimal. On y étudie les problèmes de la montée à consommation totale minimum et de la montée la plus rapide des avions VTOL dont les mêmes moteurs assurent autant la propulsion le long de la trajectoire que la portance, intégrale ou partielle, dans les régimes spécifiques. On considère séparément les appareils à l'axe fixe et ceux ayant l'axe de la poussée mobile dans leur plan de symétrie.

On définit d'abord les variables de contrôle à être considérées, en tant que paramètres qui déterminent le régime de vol et dont on dispose arbitrairement. On indique la modalité dont on peut s'en servir dans les équations du mouvement contrôlé. Ensuite on étudie les problèmes d'optimum mentionnés, en considérant comme variables de contrôle une ou plusieurs des grandeurs suivantes:  $\tau$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,\* etc.

Quant à la méthode mathématique, on a recouru aux procédés dérivés du principe de maximum de Pontriaguine.

Les résultats indiquent les types d'arcs qui composent les trajectoires optimales dans les divers cas étudiés, ainsi que les conditions de raccordement respectives définies par les fonctions de commutation établies pour chaque variable de contrôle.

Ainsi il en résultera qu'à la montée la plus économique correspond une loi de variation de la poussée par plus ou moins (*bang-bang*). Quant aux paramètres angulaires  $\alpha$ ,  $\varphi$  et  $\gamma$ , pour chacun d'eux séparément, la trajectoire optimale pour les deux problèmes d'optimum envisagés, se compose d'arcs

---

\* Pour les symboles qu'on ne définit pas dans le texte, voir les notations à la fin de l'article.

le long desquels le paramètre respectif est constant et égal au maximum, d'arcs le long desquels le paramètre est constant et égal à sa valeur minimale et d'arcs le long desquels la grandeur du paramètre varie selon une loi donnée.

La deuxième partie est consacrée à la théorie de la stabilité des avions VTOL. On y donne les évaluations des caractéristiques du mouvement perturbé en vol immobile libre (à savoir, du degré d'instabilité et de la fréquence d'oscillation des perturbations). On considère ensuite le problème de la stabilité du vol immobile commandé, en tenant compte du retardement du système d'asservissement. On indique qu'il y a une zone (respectivement une valeur) optimale du rapport entre le contrôle angulaire proportionnel (stabilisateur) et le contrôle dérivatif (amortisseur) en ce qui concerne la diminution de l'effet négatif sur la stabilité du retardement. Enfin, on expose des idées sur la modalité d'aborder la stabilité des mouvements contrôlés nonstationnaires (régimes variables) pour le cas de l'existence d'un retardement.

## INTRODUCTION

Le travail qui suit représente un essai d'aborder d'un point de vue théorique deux des plus importants problèmes de la mécanique de vol de l'avion à essor vertical, à savoir le problème du guidage optimal et celui de la stabilité. On y insistera surtout sur le premier (les questions relatives au guidage optimal), qui constitue encore, en ce qui concerne l'aviation terrestre et particulièrement la technique VTOL, un domaine assez peu exploré, aux maintes taches blanches. D'ailleurs l'un des buts de ce travail est de mettre en évidence les problèmes non résolus jusqu'à présent dont on se heurte en parcourant les diverses phases de l'élaboration de la théorie.

En ce qui concerne la solution des problèmes d'optimum, qui réclame—tout en impliquant la connaissance de l'évolution tout entière du mouvement considéré—une technique de calcul complexe, on peut entrevoir deux tendances extrêmes. L'une consiste, en essence, à choisir la solution optimum, en comparant un grand nombre de solutions diverses, obtenues par l'intégration numérique des équations de mouvement à l'aide des calculatrices électroniques; et l'autre, en appliquant une théorie variationnelle adéquate. A l'étape actuelle aucune de ces directions extrêmes n'est satisfaisante en elle-même, la solution devant être cherchée par une synthèse convenable de toutes les deux. En effet, quelles que soient les performances de la calculatrice, la comparaison doit être effectuée, fatalement, pour un nombre fini—et pas trop grand—de variantes (conditions initiales) dont le choix ne devrait pas être fait au hasard. Une théorie variationnelle adéquate peut en ce cas fournir des critères de sélection.

Se priver de cette possibilité et recourir, en vue du choix des variantes à comparer, à l'intuition ou bien à l'expérience accumulée par la pratique de vol, pourrait donner lieu à des objections, puisque, d'une part, la pratique de vol se déroule dans des limites imposées par des normes en vigueur qui émanent à leur tour d'une théorie plus ancienne et, par conséquent, plus rudimentaire\* et d'autre part, il se peut qu'il n'y ait pas une expérience concluante pour les cas nouveaux étudiés.

Cependant, dans son état actuel, la théorie n'est pas capable, en général, d'indiquer de manière univoque la solution optimale cherchée, mais seulement de la délimiter, l'application de la théorie devant être complétée soit par des calculs numériques, soit par des expériences en vol. Néanmoins, la théorie offre en puissance (sous la réserve de son perfectionnement) la possibilité de résoudre le problème d'optimum jusqu'au bout. L'application de certaines théories variationnelles offre, en outre, la possibilité d'obtenir des informations qualitatives sur le processus à être optimisé, que la comparaison des résultats du calcul numérique ne peut pas nous fournir.

Récemment la théorie des processus optimaux est devenue une préoccupation constante des ingénieurs et des mathématiciens. La mécanique du vol terrestre, en ce qui concerne les méthodes mathématiques respectives, et même, quelques-uns des résultats obtenus, est redevable à la théorie des asservissements et à la mécanique du vol des missiles et des véhicules spatiaux. On n'a pas l'intention, dans les limites de cet article, de donner des indications d'ordre historique ou bibliographique au sujet des applications des diverses théories pour le domaine de la mécanique du vol terrestre. À cette fin, un contact avec les travaux d'Angelo Miele s'avère particulièrement utile.† Cet auteur, ainsi que la plupart de ceux qui sont cités dans ses travaux, pour résoudre les problèmes d'optimum mettent en valeur, en premier lieu, les méthodes indirectes offertes par le calcul des variations classique, ainsi que par les compléments récents à ce chapitre des mathématiques appliquées. Le présent travail suit, lui aussi, la voie de l'application des méthodes variationnelles indirectes pour résoudre des problèmes du guidage optimal des avions VTOL, en faisant appel aux procédés mathématiques dérivés du principe du maximum de L. S. Pontriaguine [4].

L'opinion unanime des ingénieurs avant la seconde guerre mondiale—dont A. Miele fait mention—que “la mécanique de vol aurait atteint un

\* L'intégration numérique des équations de mouvement et l'exécution des calculs basés sur des modèles mathématiques qui ne reflètent guère les particularités des problèmes d'optimum, excluent dès le début certaines solutions optimales réelles (dont, par exemple, les solutions de type *bang-bang*).

† Voir, par exemple, les Réfs. 1, 2 (pp. 99-170), 3 (pp. 3-32), de même que les nombreuses références bibliographiques indiquées dans ces ouvrages. Il est également utile de consulter d'autres articles aussi, parus dans les recueils de Refs. 2 et 3.

stade décisif et plus ou moins stagnant de son développement"\* a été ébranlée par les progrès ultérieurs de la technique de l'aviation, aussi en ce qui concerne le problème de la stabilité du vol. Dans ce domaine, au moins à l'égard des hypothèses du travail, des méthodes mathématiques et des schémas de calcul, le monde des ingénieurs avait jadis la conviction reconfortante de la perfection acquise. Mais les valeurs élevées des accélérations négatives propres à la pratique de vol moderne, la nécessité de maintenir la stabilité d'un avion pour un intervalle de vitesses étendu et tout particulièrement, l'inévitabilité, en maintes occasions, de tenir compte — en un sens ou en un autre — de l'effet des commandes, ont fait renaître l'intérêt pour les aspects théoriques du problème de la stabilité du vol. La nécessité de cette réactualisation s'avère particulièrement évident quant au VTOL, pour lequel le modèle mathématique classique de la stabilité dynamique de l'avion est souvent complètement inopérant.

Ce travail a été réalisé à l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine.

L'auteur veut bien exprimer ses remerciements à A. Halanay de l'Institut de Mathématique de l'Académie de la R.P.R. pour l'intérêt qu'il a montré en discutant avec lui les aspects mathématiques du travail.

## PREMIERE PARTIE LOI DE GUIDAGE OPTIMALE

### LES TYPES DE PROBLEMES ETUDIÉS

#### LES AVIONS VTOL À ÊTRE CONSIDÉRÉS

On va considérer les avions VTOL dont les mêmes moteurs assurent autant la propulsion de long de la trajectoire que la portance, intégrale ou partielle, dans les régimes spécifiques. La répartition des composantes de propulsion et de sustentation est réalisée en essence, (a) par la rotation de l'axe de poussée par rapport à l'avion dans le plan longitudinal de symétrie de ce dernier, ou bien (b) par le changement d'attitude de l'appareil par rapport auquel l'axe de la poussée résultante est fixe (parallèle par exemple, à l'axe de portance nulle).

Dans les deux cas la commande de l'attitude est exécutée soit à l'aide du gouvernail de profondeur, soit, pour les régimes de vitesse quasi-nulle par des gouvernes par jets d'air comprimé convenablement disposées; on suppose que la poussée principale des moteurs ne participe pas à la commande de l'attitude.

\* Voir Ref. 1, p. 581.

## DEUX PROBLÈMES D'OPTIMUM ET DES CONSIDÉRATIONS SUR L'ESPACE OÙ A LIEU L'ÉVOLUTION

On cherchera à obtenir la loi de guidage (c'est-à-dire, la succession des ordres à être transmis) et le mouvement qui lui correspond, assurant la montée jusqu'à une hauteur donnée et l'accélération jusqu'à atteindre une vitesse donnée (a) en minimum de temps (la montée la plus rapide) ou (b) à consommation minimale (la montée la plus économique).

En général, l'optimum va être cherché dans tout l'espace, en considérant comme initial un point situé à une hauteur audessus de laquelle cesse la nécessité de toute contrainte des déplacements horizontaux. C'est ainsi que l'avion cumulera les possibilités offertes autant par la formule classique que par la formule VTOL, ce qui permettra de comparer ces deux types sous le rapport du problème d'optimum considéré.

Enfin, on exposera quelques considérations sur la manière d'aborder les problèmes d'optimum pour le cas du domaine des phases (variables d'état) limité et, en particulier, pour le cas d'une délimitation de l'espace physique où a lieu l'évolution.

### GENERALITES, DEFINITIONS, ET HYPOTHESES

#### VARIABLES DE PHASE ET VARIABLES DE CONTRÔLE UNE CLASSIFICATION DES VARIABLES DE CONTRÔLE CONSIDÉRATIONS SUR LE CHOIX DES VARIABLES DE CONTRÔLE

Dans le modèle mathématique du mouvement d'un avion, en tant que processus commandé (contrôlé), interviennent, comme on le sait, trois types de variables: (a) la variable indépendante ( $t$ ); (b) les variables qui décrivent (caractérisent) l'état du système commandé, dénommées variables ou coordonnées de phase; et (c) les variables imposant le déroulement du processus, dénommées variables, fonctions ou paramètres de contrôle. C'est-à-dire, étant données les équations, construites compte tenu des hypothèses adoptées, et un système de conditions initiales, la solution est uniquement déterminée si les paramètres de contrôle sont donnés comme fonctions de temps, dans l'intervalle de temps donné. Le modèle mathématique exprime donc la situation suivante: pour déterminer le déroulement de processus contrôlé, dans un intervalle de temps quelconque, il suffit de donner dans cet intervalle la succession des ordres à être transmis au système.

Par conséquent, ce qui caractérise les variables de contrôle, en opposition à celle de phase, c'est qu'elles peuvent être imposées arbitrairement à

chaque instant.\* La distinction, pourtant, entre les variables de contrôle et celles de phase, n'est guère rigide; aussi faut-il admettre un certain degré d'arbitraire quant au choix des paramètres de contrôle parmi toutes les variables qui caractérisent la dynamique du système dans son ensemble. Mais avant d'entamer l'examen de cet aspect qui est d'une grande importance pour l'objet de ce travail, en ce qui suit on proposera une classification des variables de contrôle.

À rares exceptions, les commandes naturelles, c'est-à-dire les grandeurs dont le pilote dispose sans intermédiaire (comme, par exemple, la déviation de la position du manche, du palonnier, ou de la manette de gaz, par rapport à leurs positions neutres, etc.) n'apparaissent pas telles quelles dans les équations utilisées par la mécanique de vol pour les mouvements commandés des avions. Les grandeurs qui y figurent, afin de les substituer, sont fonctions des valeurs des commandes naturelles, représentant des conséquences plus ou moins indirectes de l'action du pilote ou de l'autopilote. Si dans la chaîne qui relie la commande naturelle à la fonction de contrôle choisie n'interviennent que des éléments indépendants du reste des variables (de phase et de contrôle) adoptées, cette fonction de contrôle sera dénommée directe. Si, par contre, pour aboutir à la variable de contrôle choisie, tout en continuant à suivre la chaîne interviennent des éléments qui dépendent au moins d'une des variables contenues dans les équations respectives, on dira qu'on a à faire avec une variable de contrôle indirecte.

Comme variables de contrôle directes on peut choisir, par exemple, l'angle de braquage du gouvernail de profondeur, la position du volet d'admission des gaz ou la poussée-même des moteurs dans l'hypothèse qu'elle soit indépendante de  $V$  et  $h$ . On peut citer comme exemples de variables de contrôle indirectes—couramment utilisées—la poussée  $T(V, h)$ ,  $\alpha$  et  $\epsilon$  (dans l'hypothèse que les forces extérieures tangentielles et normales qui agissent sur l'avion ne dépendent pas des vitesses angulaires respectives et que le couple de contrôle longitudinal est assez grand), etc.

Dans les limites du domaine d'admissibilité les variables de contrôle directes, tout comme les commandes naturelles, peuvent être considérées dans les équations sans qu'on sente la nécessité d'une restriction quelconque. Mais quant aux variables de contrôle indirectes, survient nécessité de s'assurer que les hypothèses adoptées sont compatibles avec la possibilité d'imposer arbitrairement leurs valeurs, sans donner lieu à des incohérences. Pourtant, dans certains problèmes d'optimum il est utile, en vue d'obtenir des informations qualitatives, de considérer comme variables de contrôle certaines grandeurs qui ne sont pas libres, dans le

---

\* Évidemment, dans les limites du domaine d'admissibilité des variables de contrôle, défini, en général, par des considérations physiques.

cadre des hypothèses générales du problème, de prendre des valeurs arbitraires. En ces cas on est conduit à faire des hypothèses supplémentaires qui, tout en restreignant la généralité du problème, élimineraient les incompatibilités survenues. Ce qui vient d'être affirmé ici sera expliqué par deux exemples.

*Premier exemple.* Il a été mentionné que l'angle d'assiette longitudinale, ou l'incidence, peuvent servir comme variables de contrôle indirectes (au lieu de la variable de contrôle directe,  $\delta_e$ ) lors de l'étude du mouvement du centre de gravité de l'appareil, si le couple de contrôle longitudinal est suffisamment grand. Or, puisque ce couple est fonction en dehors de  $\delta_e$  aussi du reste des variables de phase et de contrôle, la supposition faite est équivalente à l'hypothèse que le domaine de variation de toutes les variables dont dépend le couple de contrôle longitudinal permet à celui-ci de prendre à chaque instant une valeur suffisamment grande. Évidemment, cette hypothèse n'est guère vérifiée a priori. Il en résulte la nécessité d'une hypothèse supplémentaire.

*Deuxième exemple.* Soit

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathfrak{U}(V, \gamma, \alpha, \tau) \quad \dot{h} = V \sin \gamma \dot{\gamma} = \Gamma(V, \gamma, \alpha, \tau) \alpha = \Gamma + q \\ \dot{q} &= \mu(V, \gamma, \alpha, q, \tau, \delta_e, \delta_r) \end{aligned} \quad (1)$$

le système des équations du mouvement commandé d'un avion VTOL à l'axe de poussée fixe (ou d'un avion classique, pour  $\delta_r \equiv 0$ ) dans son plan de symétrie. On va considérer maintenant  $\gamma$  comme paramètre de contrôle indirect (du mouvement du centre de gravité de l'appareil). En substituant aux variables du contrôle directes une variable de contrôle indirecte, on supprime du système d'équations celles qui déterminent le comportement de ce dernier si la loi de variation des paramètres de contrôle directs est donnée. Mais cette suppression exige des précautions à prendre, parfois sous la forme des hypothèses supplémentaires qui la justifient.

Par exemple, en choisissant comme variable de contrôle  $\gamma$ , au lieu de  $\delta_e$  et  $\delta_r$ , on supprime du système Eq. (1) les équations relatives aux  $\gamma$  et  $q$ , ainsi que celle relative à  $\alpha$ , qui contient  $q$ . Mais puisque  $\alpha$  figure aussi dans l'équation relative à  $V$ , la suppression des trois équations doit être compensée en imposant une relation entre  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $V$  et  $\tau$  justifiée par des considérations physiques. Soit  $\alpha = \alpha(\gamma, V, \tau)$  cette relation. Alors, pour le mouvement commandé du centre de gravité de l'avion dans le plan de symétrie il en résultera le système d'équations

$$\dot{V} = \mathfrak{U}^*(V, \gamma, \tau) \equiv \mathfrak{U}(V, \gamma, \alpha(\gamma, V, \tau), \tau) \quad \dot{h} = V \sin \gamma \quad (2)$$

## HYPOTHÈSES ET GÉNÉRALITÉS CONCERNANT LA MÉTHODE

Afin de bien pouvoir appliquer le principe de maximum on va supposer que les commandes manquent d'inertie, c'est-à-dire, que les variables de contrôle passent d'une certaine valeur à une autre quelconque instantanément. La classe des variables de contrôle admises sera donc la classe de fonctions continues par morceaux. La courbe représentant chaque variable de commande comme fonction de temps aura ainsi un nombre fini de points de discontinuité de première espèce. Le système des équations de mouvement commandé optimal subira donc en ces points des variations de structure, ceux-ci représentant des discontinuités de la dérivée par rapport au temps des variables de phase. Il est d'une grande utilité de déterminer ces points de raccordement des divers arcs de la trajectoire optimale, ce qui revient à déterminer les points de discontinuité de chacun des variables de contrôle imposées par la loi de guidage optimale. À cette fin on est conduit à essayer de construire des fonctions—dites de commutation (*switching functions*)—à l'aide desquelles on déterminera les points respectifs de raccordement.

## HYPOTHÈSES DIVERSES

Pour des raisons de commodité et de simplicité de l'exposition on fera aussi les hypothèses suivantes: la masse de l'appareil et la densité de l'air sont constantes; la poussée indépendante de la vitesse de vol; les coefficients des forces aérodynamiques dépendent seulement de l'incidence, à savoir le coefficient de portance linéairement et celui de la traînée paraboliquement (sauf les cas des évolutions des avions VTOL à l'axe de poussée mobile à grandes incidences, positives ou négatives, où le coefficient de traînée sera considéré constant); pour une incidence donnée les forces aérodynamiques sont proportionnelles au carré de la vitesse.

## AVIONS VTOL A L'AXE DE LA POUSSEE MOBILE

### LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT COMMANDÉ LONGITUDINAL

Compte tenu des hypothèses énoncées, les équations du mouvement longitudinal commandé de l'avion seront

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(1 - \eta) a_0 V^2 - \eta(a_1 + a_2 \alpha^2) V^2 - g \sin \gamma + g \tau \cos (\lambda + \alpha) \\ &\equiv \mathfrak{U}(V, \gamma, \alpha, \tau, \lambda) \end{aligned}$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= (1 - \eta) b_0 V + \eta b_1 V \alpha - \frac{g \cos \gamma}{V} + \frac{g \tau \sin (\lambda + \alpha)}{V} \equiv \Gamma(V, \gamma, \alpha, \tau, \lambda) \\ \dot{\alpha} &= q - \dot{\gamma} \equiv \mathcal{Q}(V, \gamma, \alpha, q, \tau, \lambda) \\ \dot{q} &= \mu(V, \gamma, \alpha, q, \tau, \lambda, \delta_e, \delta_r) \equiv \mu_1(V, \alpha, q) - \eta c V g \tau \sin (\lambda + \alpha) \\ &\quad + \mu_2(V, \alpha, \delta_e, \delta_r) \end{aligned} \tag{3}$$

où

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\alpha^{(1)} \leq \alpha \leq \alpha^{(2)} \\ 0 & \text{pour le reste} \end{cases} \quad \text{ou } \eta = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\gamma' \leq \gamma \leq \gamma'' \\ 0 & \text{pour le reste} \end{cases}$$

$c$  est une constante positive et  $\mu_2(V, \alpha; \delta_e, \delta_r)$  représente, à un facteur constant près, le couple de contrôle longitudinal.

Les variables de contrôle seront choisies parmi les grandeurs  $\tau, \varphi, \gamma$  et  $\mu_2$ , soumises aux contraintes suivantes:

$$\begin{aligned} \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max} \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} - M^{(1)}(V, \alpha) \leq \mu_2 \leq M^{(2)}(V, \alpha) \end{aligned}$$

où  $\epsilon$  est un angle donné, d'habitude inférieur à  $\pi/4$ .

### LA MONTÉE ET L'ACCÉLÉRATION LES PLUS ÉCONOMIQUES

Soit  $t_1$  le temps que l'avion met à atteindre une hauteur donnée  $h_1$ , et une vitesse donnée  $V_1$ , à consommation minimum.

En supposant que la consommation par unité de temps est fonction seulement de la poussée totale des moteurs, respectivement du rapport poussée/poids,  $\tau$ , soit  $f(\tau)$  cette fonction, la fonctionnelle à minimiser sera

$$J = \int_0^{t_1} f(\tau) dt \tag{4}$$

Soient  $\tau, \lambda$  et  $\mu_2$  les variables de contrôle. Conformément à la méthode de Pontriaguine les fonctions de contrôle optimales, si elles existent, doivent être cherchées parmi celles qui assurent à chaque instant, que la fonction

$$H = -f(\tau) + \psi_1 \dot{U} + \psi_2 V \sin \gamma + \psi_3 \Gamma + \psi_4 \mathcal{Q} + \psi_5 \mu \tag{5}$$

atteigne sa valeur maximale, où les variables auxiliaires  $\psi_i$  satisfont à système adjoint

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial V} \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial h} \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \gamma} \dot{\psi}_4 = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} \dot{\psi}_5 = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (6)$$

Évidemment,  $H$  atteindra le maximum par rapport aux variables de contrôle (les coordonnées de phase et les variables  $\psi_i$  étant considéré comme fixées) en même temps que la fonction—voir Eq. (3).

$$\begin{aligned} 3\mathcal{C} = & -f(\tau) + \psi_1 g \tau \cos(\lambda + \alpha) - \frac{\psi_4 - \psi_3}{V} g \tau \sin(\lambda + \alpha) \\ & - \psi_5 [\eta c V g \tau \sin(\lambda + \alpha) + \mu_2] \end{aligned} \quad (7)$$

Par la substitution

$$\psi_1 g = p \sin \psi, \quad \frac{g(-\psi_3 + \psi_4 + \psi_5 \eta c V^2)}{V} = p \cos \psi \quad (8)$$

Eq. (7) devient

$$3\mathcal{C} = -f(\tau) + p \tau \sin(\psi - \varphi - \alpha) + \psi_5 \mu_2 \quad (9)$$

Des conclusions impliquées par cette dernière relation il résulte que la trajectoire optimale sera composée d'arcs le long desquels l'angle  $\lambda$  indiquant la direction de la poussée, est constant et égal à sa valeur maximum  $((\pi/2) + \epsilon)$ , d'arcs le long desquels  $\lambda$  est nul (égal à sa valeur minimum et enfin d'autres le long desquels  $\lambda$  varie selon une loi donnée ( $\lambda = \psi - \alpha - (\pi/2)$ ). Quant au couple de contrôle longitudinal il est égal à chaque instant soit à sa valeur maximum soit minimum à l'instant respectif. Les conditions de raccordement de ces divers arcs sont déterminées par les fonctions de commutation suivantes:  $\psi - \alpha$  pour la variable de contrôle  $\lambda$  et  $\psi$  pour  $\mu_2$  conformément aux relations de commutation indiquées, Tableau 1

Afin d'obtenir des informations qualitatives similaires concernant la valeur optimale du rapport  $\tau$  (de la poussée) il est nécessaire de faire quelques précisions au sujet de la fonction  $f$ . On supposera que la fonction positive  $f(\tau)$  satisfait aux conditions suivantes:

(a)  $f(0)$  est nulle (ou petite) et  $f'(0) \rightarrow \infty$  (ou grande)

$$(b) \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{f(\tau)}{\tau} = 0 \quad (10)$$

(c)  $f''(\tau)$  garde le signe.

**TABLEAU 1**

| Variables de contrôle | Conditions de commutation  | Valeurs optima                  |
|-----------------------|--|---------------------------------|
| $\lambda$             | $2k\pi \leq \psi - \alpha \leq \pi/2 + 2k\pi$                                | 0                               |
|                       | $\pi/2 + 2k\pi \leq \psi - \alpha \leq \pi + \epsilon + 2k\pi$               | $\psi - \alpha - \pi/2 + 2k\pi$ |
|                       | $\pi + \epsilon + 2k\pi \leq \psi - \alpha \leq F\pi/4 - \epsilon/2 + 2k\pi$ | $\pi/2 + \epsilon$              |
|                       | $F\pi/4 - \epsilon/2 + 2k\pi \leq \psi - \alpha \leq 4k\pi$                  | 0                               |
| $\mu_2$               | $\psi_s \geq 0$  | $M^{(2)}(V, \alpha)$            |
|                       | $\psi_s \leq 0$  | $-M^{(1)}(V, \alpha)$           |

Par exemple,  $f(\tau) = \kappa\tau^\beta$  avec  $\kappa > 0$  et  $0 < \beta < 1$ .

Alors le principe du maximum conduit aux conclusions suivantes:

$$\tau = \tau_{\max} \text{ pour } p \sin(\psi - \lambda - \alpha) > \frac{f(\tau_{\max})}{\tau_{\max}} \tag{11}$$

$$\tau = \tau_{\min} = 0 \text{ pour } p \sin(\psi - \lambda - \alpha) < \frac{f(\tau_{\max})}{\tau_{\max}}$$

Et maintenant on discutera certains aspects ayant trait à la préparation de l'algorithme de calcul. Puisqu'il est question d'un problème bilocal on doit recourir à une technique par *trial and error*.

Soient les systèmes de conditions initiales et finales indiqués Tableau 2.

**TABLEAU 2**

| $t$            | $V$   | $h$   | $\gamma$           | $\alpha$   | $q$       |
|----------------|-------|-------|--------------------|------------|-----------|
| $t_0 = 0$      | $V_0$ | $h_0$ | $\gamma_0 = \pi/2$ | $\alpha_0$ | $q_0 = 0$ |
| $t_1$<br>libre | $V_1$ | $h_1$ | $\gamma_1 = 0$     | $\alpha_1$ | libre     |

Afin de résoudre le problème d'optimum on intègre le système Eq. (3) + Eq. (6) pour 5 conditions initiales données (celles du Tableau 2) et pour 5 libres (qui correspondent aux variables auxiliaires). Lors de l'intégration numérique il faut tenir compte des modifications subies par le système

d'équations conformément aux conditions de commutation indiquées [Tableau 1 et Eq. (11)]. Pour déterminer les 6 paramètres libres:  $t_1$ ,  $\psi_2$ ,  $p(t_0)$ ,  $\psi(t_0)$ ,  $\psi_4(t_0)$ ,  $\psi_5(t_0)$  on dispose de 4 conditions finales données, d'une relation de transversalité correspondante à la valeur finale libre de  $q$  et d'une condition déduite du principe du maximum, selon lequel, la valeur maximale, effectivement atteinte le long de l'intervalle  $[t_0, t_1]$  pour les valeurs optima des variables de contrôle, est constante et égale à zéro.

(Note: Si le nombre des valeurs données des coordonnées de phase est plus grand pour  $t_1$  que pour  $t_0$  il est convenable de prendre pour moment initial  $t_1$ , ce qui est permis, le système considéré étant autonome.)

## MONTÉE ET ACCÉLÉRATION EN MINIMUM DE TEMPS

Du point de vue formel ce problème peut être traité comme une particularisation de celui du paragraphe précédent, en posant  $f(\tau) \equiv 1$ . De plus, on considérera  $\tau = \tau_{\max} = \text{const.}$

En prenant pour paramètres de contrôle  $\mu_2$  et  $\lambda$ , les conditions du Tableau 1 conservent leur valabilité aussi pour le problème de minimum de temps.

## AVIONS VTOL A L'AXE DE LA POUSEE FIXE

### ÉQUATIONS GÉNÉRALES

### VARIABLES DE CONTRÔLE À ÊTRE CONSIDÉRÉES

Avec les hypothèses adoptées et supposant, de plus, que l'axe de la poussée est parallèle à l'axe de portance nulle de l'avion, les équations du mouvement longitudinal de l'avion commandé peuvent être amenées à la forme

$$\dot{V} = - (a_1 + a_2 \alpha^2) V^2 - g \sin \gamma + g \tau \cos \alpha \equiv \mathfrak{U}(V, \gamma, \alpha, \tau)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma$$

$$\dot{\gamma} = b_1 V \alpha - \frac{g \cos \gamma}{V} + \frac{g \tau \sin \alpha}{V} \equiv \Gamma(V, \gamma, \alpha, \tau)$$

$$\dot{\alpha} = q - \dot{\gamma} \equiv \mathfrak{A}(V, \gamma, \alpha, q, \tau) \quad (12)$$

$$\dot{q} = \mu_1(V, \alpha, q, \tau) + \mu_2(V, \alpha, \delta_e, \delta_r)$$

où  $\mu_2$  représente, à un facteur constant près, le couple de contrôle longitudinal.

Les paramètres de contrôle seront choisis parmi  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\mu_2$ , soumises aux contraintes suivantes:

$$\begin{aligned} \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max} \quad -\alpha^{(1)} \leq \alpha \leq \alpha^{(2)} \\ 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} - M^{(1)}(V, \alpha) \leq \mu_2 \leq M^{(2)}(V, \alpha) \end{aligned} \quad (13)$$

### MONTÉE ET ACCÉLÉRATION À CONSOMMATION MINIMUM

Il faut minimiser la fonctionnelle Eq. (4) pour les conditions initiales et finales données, Tableau 2. Soient  $\tau$  et  $\mu_2$  les variables de contrôle. Par un raisonnement analogue, on retrouvera pour  $\mu_2$  les relations indiquées dans le Tableau 1 et pour  $\tau$  des relations, similaires aux Eq. (11), de la forme suivante

$$\begin{aligned} \tau = \tau_{\max} \quad \text{pour} \quad \psi_1 \cos \alpha + \frac{\psi_3}{V} \sin \alpha > \frac{f(\tau_{\max})}{g\tau_{\max}} \\ \tau = \tau_{\min} = 0 \quad \text{pour} \quad \psi_1 \cos \alpha + \frac{\psi_3}{V} \sin \alpha < \frac{f(\tau_{\max})}{g\tau_{\max}} \end{aligned} \quad (14)$$

dont on doit tenir compte lors de la préparation de l'algorithme.  $\psi_1$  et  $\psi_3$  sont les variables auxiliaires, qui correspondent, respectivement, aux variables de phase  $V$  et  $\gamma$ .

### MONTÉE ET ACCÉLÉRATION EN MINIMUM DE TEMPS

(a) On commence par considérer comme variable de contrôle seulement l'incidence. On substituera donc les variables de contrôle directes  $\delta_e$  et  $\delta_r$  (le braquage de la profondeur et le paramètre de contrôle de la gouverne par jets) par  $\alpha$ , en supposant que le couple de contrôle ( $\mu_2$ ) est assez grand pour permettre à chaque instant la réalisation d'une incidence arbitraire dans l'intervalle  $[-\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]$ . Aussi pourra-t-on considérer ainsi, séparément, le mouvement du centre de gravité de l'appareil, décrit par les premières trois équations du système Eq. (12). Les angles  $\alpha^{(1)}$  et  $\alpha^{(2)}$  étant suffisamment petits, on négligera les termes en  $\alpha$  du degré supérieur à 2. Alors le système prendra la forme

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(a_1 + a_2\alpha^2) V^2 - g \sin \gamma + g\tau \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \\ \dot{h} &= V \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= b_1 V \alpha - \frac{g \cos \gamma}{V} + \frac{g\tau\alpha}{V} \end{aligned} \quad (15)$$

Le principe du maximum exige que la fonction  $H$  relative au système Eq. (15) atteigne à chaque instant sa valeur maximum par rapport à  $\alpha$ , ce qui revient à la même chose, que  $\alpha$  optimal réalise le maximum de fonction

$$\mathcal{H} = -\psi_1 \alpha^2 \left( a_2 V^2 + \frac{g\tau}{2} \right) + \psi_3 \alpha \left( b_1 V + \frac{g\tau}{V} \right) \quad (16)$$

Soit

$$\alpha(V, \psi_1, \psi_3) = \frac{\psi_3 \left( b_1 V + \frac{g\tau}{V} \right)}{2\psi_1 \left( a_2 V^2 + \frac{g\tau}{2} \right)}$$

Alors, il est facile à voir que la trajectoire optimale sera formée d'arcs incidence maximum, à incidence minimum et, enfin, à incidence variable égale à  $\alpha(V, \psi_1, \psi_3)$ . Les conditions de raccordement respectives sont données dans le Tableau 3.

TABLEAU 3

| [Conditions de commutation] |          |   | $\alpha$ optimum |
|-----------------------------|----------|---|------------------|
| $\psi_1$                    | $\psi_3$ | $\alpha$  |                  |
| $>0$                        | $>0$     | $\geq \alpha^{(2)}$                             | $\alpha^{(2)}$   |
|                             |          | $\leq \alpha^{(2)}$                             | $\alpha$         |
| $>0$                        | $<0$     | $\leq -\alpha^{(1)}$                            | $-\alpha^{(1)}$  |
|                             |          | $\geq -\alpha^{(1)}$                            | $\alpha$         |
| $<0$                        | $>0$     | indifféremment*                                 | $\alpha^{(2)}$   |
| $<0$                        | $<0$     | $\geq \frac{1}{2}(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)})$ | $-\alpha^{(1)}$  |
|                             |          | $\leq \frac{1}{2}(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)})$ | $\alpha^{(2)}$   |

\* Puisque  $\alpha^{(2)} > \alpha^{(1)} \geq \alpha^{(1)} - 2\alpha$

(Note: On pourrait discuter de manière analogue le cas du problème de la consommation minimum, en considérant le maximum de la fonction

$$\mathcal{H} = -f(\tau) - \alpha^2 \left( \frac{g\tau}{2} + a_2 V^2 \right) p \sin \psi + \alpha(g\tau + b_1 V^2) p \cos \psi$$

mais la discussion serait plus compliquée à cause du grand nombre de cas qu'elle comporte.)

(b) On peut obtenir directement des informations qualitatives (approximatives) relatives à la trajectoire optimale en prenant pour variable de contrôle l'angle  $\gamma$  de la pente de la trajectoire. C'est bien une variable de contrôle indirecte, pour laquelle il faut prendre les précautions dont on a déjà parlé. A cette fin on éliminera la variable de phase  $\alpha$ , en supposant qu'elle satisfait à chaque instant à la relation

$$\alpha = \alpha(\gamma, V) \equiv \frac{g \cos \gamma}{b_1 V^2 + g\tau} \quad (17)$$

qui correspond à la supposition que l'accélération centripète le long de la trajectoire optimale est négligeable et que l'incidence est suffisamment petite afin qu'on puisse substituer au sinus son argument.

Alors, le système des équations du mouvement contrôlé considéré pourra être réduit à la forme

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \left[ a_1 + \frac{a_2 g^2 \cos^2 \gamma}{(b_1 V^2 + g\tau)^2} \right] V^2 - g \sin \gamma + g\tau \left[ 1 - \frac{g^2 \cos^2 \gamma}{2(b_1 V^2 + g\tau)^2} \right] \\ \dot{h} &= V \sin \gamma \end{aligned} \quad (18)$$

On cherche à déterminer  $\gamma$  de façon que la fonction

$$\mathcal{J} = a\nu^2 + b\nu$$

où  $\nu = \sin \gamma$

$$a = \psi_1 \frac{g^2 \left( a_2 V^2 + \frac{g\tau}{2} \right)}{(b_1 V^2 + g\tau)^2} \quad (19)$$

$$b = \psi_2 V - \psi_1 g$$

soit maximum à chaque instant,  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Il en résulte que la trajectoire optimale sera formée de trois sortes d'arcs: montée verticale, vol en palier (ou piquage vertical si  $\gamma_{\min} = -\pi/2$ ) et vol à pente variable ( $\gamma =$  fonction de  $V$  et  $\psi_1$ )\* conformément aux relations données, Tableau 4.

\* Cf. Ref. 3, p. 21, et les travaux [5,6] y cités. L'analyse y contenue se réfère au vol de montée d'un avion turbo-réacteur classique dans d'hypothèses telles que: position du volet d'admission fixe, poussée parallèle à la direction de vol, masse constante, traînée induite calculée en substituant à la portance le poids de l'avion, etc.

TABLEAU 4

| Conditions de commutation |      |                  | $\gamma$ optimum          |
|---------------------------|------|------------------|---------------------------|
| $a$                       | $b$  | $b/2a$           |                           |
| $>0$                      | $>0$ | indifféremment   | $\pi/2$                   |
| $>0$                      | $<0$ | $> -\frac{1}{2}$ | $\pi/2$                   |
|                           |      | $< -\frac{1}{2}$ | 0                         |
| $<0$                      | $>0$ | $< -1$           | $\pi/2$                   |
|                           |      | $> -1$           | $\text{arc sin } (-b/2a)$ |
| $<0$                      | $<0$ | indifféremment   | 0                         |

### PROBLEME DES COORDONNEES DE PHASE, LIMITEES

Le domaine de variation des coordonnées de phase, ainsi que celui des fonctions de contrôle sont, naturellement, limités. Dans les paragraphes qui précèdent nous avons tenu compte seulement de l'existence d'un domaine admis pour les variables de contrôle. Un tel mode de traiter le problème, parfaitement acceptable à l'étape actuelle en ce qui concerne les vitesses, les vitesses angulaires et même les déplacements angulaires (les différences entre le domaine admis et celui d'accessibilité n'étant pas en général trop importantes), peut être insatisfaisant en ce qui concerne les coordonnées de position pour le cas du décollement et de la montée dans une région accidentée avec des dénivèlements importants de terrain. En ce cas, le déplacement horizontal cesse d'être libre devant vérifier une condition de forme  $f(h,l) \leq 0$ . L'existence de cette nouvelle contrainte implique la nécessité de compléter le système d'équations avec l'équation  $\dot{l} = V \cos \gamma$ .

Le nouveau problème peut être entamé en utilisant les résultats récents de R. V. Gamkrélidze (Ref. 4, chap. 6), ou L. D. Berkovitz [7]. Mais il y a la difficulté suivante qui surgit: au cas des contraintes imposées seulement au  $l$  et  $h$  et de l'emploi des variables de contrôle, autres que  $\gamma$ ,\* le problème ne remplit pas les conditions de régularité où l'on applique le théorème de Gamkrélidze. On peut essayer d'échapper à cette situation, en introduisant un système de variables de contrôle fictives petites, dans les équations pour  $l$  et  $h$  qui n'influencent pas sensiblement la solution, mais transforment ce problème en un problème régulier dans le sens de Gamkrélidze.

La trajectoire optimale se compose d'arcs situés à l'intérieur du domaine admis, qui se déterminent par les procédés indiqués dans les paragraphes précédents, ainsi que d'arcs situés sur la frontière du domaine admis, pour la détermination desquels on utilise une variante modifiée du principe du maximum. La détermination complète de la trajectoire optimum exige aussi des conditions supplémentaires de raccordement.

L'étude complète du problème comporte de très grandes difficultés de calcul et des efforts sont encore nécessaires pour aboutir à des conclusions significatives.

## DEUXIÈME PARTIE CERTAINS ASPECTS DU PROBLÈME DE LA STABILITÉ DES AVIONS VTOL

### CONSIDÉRATIONS PRELIMINAIRES HYPOTHESES

Dans ce qui suit nous présenterons brièvement certains résultats obtenus dans le domaine de la théorie de la stabilité des avions à essor vertical en étudiant pour le cas des régimes de base spécifiques, (a) le mouvement perturbé libre (noncontrôlé) en vue d'évaluer la vitesse d'augmentation et la fréquence d'oscillation des perturbations et (b) la stabilité de l'avion contrôlé, et tenant compte du retardement admissible du système de contrôle. Pour des détails concernant les raisonnements et les calculs mathématiques, on peut consulter les Refs. 8-10 et pour le fondement mathématique, le chapitre IV de Ref. 11.

Dans les études effectuées [8-10] on a pris en considération les deux particularités suivantes de la formule VTOL, essentielles en ce qui concerne la stabilité dynamique: (a) l'existence des régimes de vol spécifiques, caractérisés par des vitesses de vol basses ou nulles et, donc, par une stabilité statique et un amortissement aérodynamique précaire ou nul et (b) que les moments gyroscopiques transmis par les organes en rotation des moteurs ne sont pas négligeables.

On y suppose encore que l'axe de la poussée résultante passe par le centre de gravité durant les mouvements nonperturbé et perturbé. L'avion est considéré comme un corps rigide.

---

\* L'emploi de l'angle  $\gamma$  d'inclinaison de la pente de la trajectoire comme paramètre de contrôle est dépourvu de sens parce qu'on élimine ainsi tout problème d'optimum sur la frontière du domaine admis de l'espace des phases,  $f(h,l) = 0$ , sur cette frontière  $\gamma$  apparaissant, évidemment, parfaitement déterminé.

## MOUVEMENT PERTURBE EN VOL IMMOBILE LIBRE (NONCONTROLE)

### GÉNÉRALITÉS

Le vol immobile libre nonperturbé, caractérisé par le manque de forces et des moments aérodynamiques, \* est essentiellement instable du point de vue dynamique. On a montré [8], que l'instabilité se maintient aussi dans le cas de tout contrôle partiel. Dans ces conditions, l'investigation du mouvement perturbé présente de l'intérêt pour établir l'efficacité d'une intervention stabilisatrice, respectivement pour le choix des paramètres de l'installation de contrôle (et, en particulier, du retardement admissible). À cette fin on a cherché des évaluations concernant le degré d'instabilité (c'est-à-dire la vitesse de croissance des perturbations) et la fréquence d'oscillation des perturbations.

On a considéré le mouvement perturbé autour du centre de gravité de l'avion dans l'hypothèse de la contrainte des variables cinématiques de translation, en étudiant le système d'équations auxiliaire correspondant. † Les moments qui interviennent dans les membres droits de ces équations consistent en une partie linéaire en ce qui concerne les variables dynamiques, représentant l'effet gyroscopique des organes en rotation des moteurs et des termes nonlinéaires qui représentent les moments aérodynamiques de perturbation.

### ÉVALUATION DU DEGRÉ D'INSTABILITÉ

Soit  $\xi(t)$  une grandeur qui caractérise la valeur de la perturbation en un moment  $t$ . Si par des considérations de résistance de la structure, de sécurité du vol, de confort, etc., on parvient à exiger que  $\xi(t) \leq \kappa \xi(t_0)$ , alors l'intervalle de temps où cette condition est remplie peut être évalué à l'aide d'une relation de la forme

$$t - t_0 \leq \frac{1 - \frac{1}{\kappa}}{\xi(t_0) \chi}$$

---

\* Quant aux forces et aux moments aérodynamiques de perturbation on les décrit dans les équations du mouvement perturbé, par des termes nonlinéaires, généralement de degré supérieur à 2.

† Le système auxiliaire s'obtient en éliminant du système considéré comme complet les variables contraintes et les équations qui leurs correspondent. On a montré [12] que la stabilité asymptotique uniforme de la solution nulle de l'équation auxiliaire implique la stabilité du mouvement partiellement commandé tout entier.

où  $\chi$  est une fonction connue des caractéristiques de construction de l'avion et des moteurs, ainsi que du régime des moteurs. Par conséquent, l'intervalle de temps nécessaire pour qu'une perturbation soit doublée sera plus grand que  $\frac{1}{2\xi(t_0)\chi}$ .

### ÉVALUATION DE LA FRÉQUENCE D'OSCILLATION DES PERTURBATIONS

On a établi [8] que la fréquence d'oscillation,  $\omega$ , dans l'hypothèse des petites perturbations, ne dépasserait pas une certaine limite,  $\bar{\omega}$ , donnée par la formule

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{h_{r_z}^2}{I_X I_Y} + \frac{h_{r_z}^2}{I_Y I_Z}} \approx J\Omega \sqrt{\frac{\sin^2 \sigma}{I_X I_Y} + \frac{\cos^2 \sigma}{I_Y I_Z}}$$

En approximant  $\sigma$  par  $\pi/2$  dans le cas des moteurs basculants, et par 0, dans celui des moteurs fixes, on a, évidemment, dans le premier cas  $\omega \leq J\Omega/\sqrt{I_X I_Y}$ , et  $\omega \leq J\Omega/\sqrt{I_Y I_Z}$  dans le deuxième.

## STABILITE EN VOL IMMOBILE CONTROLE; L'INFLUENCE DU RETARDEMENT

### CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES CONCERNANT LE MODÈLE MATHÉMATIQUE

Les résultats qui vont être exposés [9] correspondent à l'hypothèse que les caractéristiques quantitatives du mouvement perturbé du centre de gravité diffèrent suffisamment de celles du mouvement perturbé autour du centre de gravité de sorte qu'on puisse éliminer les équations de la translation à l'aide de la théorie des mouvements partiellement commandés. Comme système auxiliaire on a considéré les équations linéarisées du mouvement perturbé autour du centre de gravité. On a supposé que le système de contrôle détectait les déviations des assiettes et des vitesses angulaires par rapport aux axes d'un système lié à l'avion. En outre on a admis l'hypothèse simplificatrice que les composantes de sortie étaient des fonctions linéaires de ces déviations. Ainsi, par exemple

$$\delta_X(t) = \kappa_1 p(t - \tau) + \kappa_2 \phi(t - \tau) \quad (20)$$

On a supposé que le retardement du canal proportionnel (stabilisateur) et celui du canal dérivatif (amortisseur) de l'autopilote avaient la même valeur constante  $\tau$ .

On a supposé, de même, que les axes du système de référence  $XY$  lié à l'avion étaient suffisamment rapprochés des axes principaux d'inertie afin qu'on pût négliger le produit d'inertie par rapport aux axes  $OZ$  et  $O$  et que les axes de rotation des rotors des moteurs se trouvaient en plan parallèles au plan de symétrie longitudinal de l'avion ( $h_{ry} = 0$ ).

On considère, pour fixer les idées, le cas de l'avion VTOL à asiet longitudinale normale et à moteurs fixes (la composante verticale de poussée se réalise par la déflexion du jet), donc  $h_{rx} \cong J\Omega$ ,  $h_{ry} \cong h_{rz} \cong 0$ .

Avec les simplifications énoncées, le système d'équations du mouvement perturbé autour du centre de gravité se sépare en deux systèmes d'équations indépendants dont l'un décrit le mouvement de roulis et l'autre les mouvements de tangage et de lacet, couplés par l'effet gyroscopique des organes des moteurs.

## DOMAINE DE STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DANS LE HYPER-ESPACE DES PARAMÈTRES

Par paramètres on désigne ici des grandeurs dont dépendent les coefficients des équations à considérer et qui caractérisent à certains égards la construction ainsi que les propriétés aérodynamiques de l'appareil, le fonctionnement du système de contrôle, le régime de vol nonperturbé (de base).

On définit le domaine de la stabilité asymptotique dans le hyper-espace des paramètres comme l'ensemble des points du hyper-espace où les conditions

$$\operatorname{Re}(s_i) \leq -\epsilon < 0 \quad (21)$$

sont remplies simultanément,  $s_i$  représentant les zéros du quasi-polynôme caractéristique des transformées de Laplace des équations considérées.

On a trouvé que pour le roulis pur, si pour le cas idéal du retardement nul le mouvement nonperturbé contrôlé est asymptotiquement stable sur toute la demi-droite  $c > 0$  ( $c = \kappa_1/\kappa_2$ ), le domaine de la stabilité asymptotique dans le plan  $(c, \tau)$  aura, à peu près, la forme indiquée, Fig. 1. Il en résulte un rapport  $\kappa_1/\kappa_2$  optimal, correspondant à la valeur maximum du délai admissible.

## LA STABILITÉ DES MOUVEMENTS (CONTROLES) NONSTATIONNAIRES

Afin d'étudier la stabilité des mouvements contrôlés nonstationnaires à retardement on pourrait faire appel à la théorie mathématique existente, basée sur l'utilisation des fonctionnelles de Liapounov (voir Ref. 13).

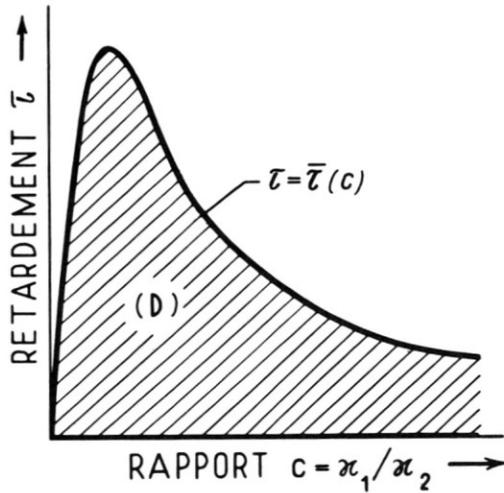


Figure 1. Domaine de stabilité asymptotique (D) dans le plan  $(c, \tau)$  pour le roulis pur.

Bien que cette théorie soit élaborée en ce qui concerne tous les aspects de principe, jusqu'au présent il y a peu d'exemples d'application effective et, par conséquent, on ne peut pas parler pour le moment d'une expérience accumulée en cette matière. Son application au problème de la stabilité de l'avion commandé reste actuelle, comme une continuation des essais d'appliquer les méthodes directes à la stabilité des mouvements non-stationnaires de l'avion noncontrôlé.

Pour des petits retards, le problème peut être entamé aussi d'une autre manière. En effet, la théorie générale affirme, pour ce cas-ci, qu'on peut déduire du système sans retardement (autopilote idéal) des conclusions relatives à la stabilité, et même à l'évaluation des caractéristiques du mouvement perturbé, pour  $\tau \neq 0$ . Ainsi, on a trouvé [10] des formules d'évaluation de l'intervalle  $[0, \bar{\tau}]$  où l'on assure pour  $\tau \neq 0$  la valabilité des conclusions sur la stabilité, déduites pour le retardement nul, pour les cas des mouvements de base uniformes. Des relations semblables peuvent être obtenues à l'aide de la théorie mathématique existante (Ref. 11, chap. 4, §4) aussi pour les mouvements de base nonstationnaires (régime de base variable). Si, par exemple, on a obtenu pour le système à autopilote idéal, une évaluation de forme  $|x(t, s)| < ke^{-\lambda(t-s)}$  où  $x$  est un vecteur ayant comme composantes les déviations des variables de phase (e.g.,  $V, \theta, \alpha, q$ ), la stabilité du système à autopilote réel est alors assurée pour les valeurs  $\tau$  qui ne dépassent pas  $\bar{\tau} = \frac{\lambda}{kb(a+b)}$  où  $a$  représente une majorante des termes nonaffectés par le retardement et  $b$  une majorante des

termes à retardement, qui caractérisent le fonctionnement de l'autopilote. Lors d'une telle évaluation il faut chercher à trouver pour chaque cas, des valeurs pour les majorantes  $a, b$  et  $k$ , aussi petites que possible, à savoir aussi rapprochées que possible de la borne supérieure des fonctions majorées. Dans la formule ci-dessus,  $\lambda/k$  donne une mesure du degré de stabilité du système sans retardement,  $b$  de l'efficacité du couple de stabilisation et  $a + b$  de l'accélération angulaire du tangage. Le fait que  $\bar{\tau}$  décroît avec l'augmentation de l'efficacité du couple de contrôle, souligne la nécessité de traiter le problème directement pour l'autopilote réel.

### SYMBOLES

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $t$                         | temps  |
| $V$                         | vitesse du centre de gravité de l'avion par rapport à l'air  |
| $\alpha$                    | incidence  |
| $\gamma$                    | inclinaison du vecteur-vitesse par rapport à l'horizon   |
| $\theta$                    | assiette longitudinale   |
| $\phi$                      | inclinaison latérale de l'avion  |
| $p, q, r$                   | vitesse angulaires de l'avion autour des axes d'un système de référence lié à l'avion issu du centre de gravité de l'avion               |
| $h$                         | altitude de vol  |
| $l$                         | la distance horizontale franchie par l'avion   |
| $m$                         | masse de l'avion   |
| $I_X, I_Y, I_Z$             | moments d'inertie de l'avion par rapport aux axes de référence liés à l'avion  |
| $T$                         | poussée ou traction totale   |
| $\tau = T/mg$               | rapport poussée/poids  |
| $\lambda$                   | angle formé par l'axe de la poussée (traction) avec l'axe de portance nulle de l'avion   |
| $\sigma$                    | angle formé par l'axe de rotation des masses mobiles des réacteurs (ou des hélices) avec le plan $XY$ du système de référence            |
| $h_{r_X}, h_{r_Y}, h_{r_Z}$ | composantes du moment de la quantité de mouvement des organes en rotation des moteurs (ou des hélices) par rapport aux axes de référence |
| $\Omega$                    | vitesse angulaire des rotors des turbo-réacteurs (ou des hélices)  |
| $J$                         | moment d'inertie totale des masses en rotation des turbo-réacteurs (ou des hélices)  |
| $\delta_e$                  | braquage du gouvernail de profondeur   |

|            |  |
|------------|--|
| $\delta_r$ | paramètre de contrôle des gouvernes par jets |
| $\delta_x$ | paramètre de contrôle du mouvement de roulis |
| $g$        | constante de gravitation                     |
| $\tau$     | retardement du système de commande           |

## REFERENCES

1. Miele, A., "Some Recent Advances in the Mechanics of Terrestrial Flight," *ARS Jet Propulsion*, vol. 28, no. 9 (September 1958), pp. 581-587.
2. Leitmann, G. (ed.), *Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems* (New York: Academic Press, 1962).
3. Bellman, R. (ed.), *Mathematical Optimization Techniques* (Berkeley: U. of California Press, 1963).
4. Pontriaguine, L. S., V. G. Boltianski, R. V. Gamkrélidze and E. F. Michtchenko, *Matematicheskaiia teoria optimalnykh protsessov, Gos. Izd. Phys.-Math. Lit.*, Moscow, 1961. English translation by L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrélidze and E. F. Mischenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes* (New York: Wiley, 1962).
5. Miele, A., Problemi di minimo tempo nel volo non-stazionario degli aeroplani, *Atti Accad. Sci. Torino*, vol. 85 (1950-1951); cited by Ref. 3.
6. Lush, K. J., "A Review of the Problem of Choosing a Climb Technique, with Proposals for a New Climb Technique for High Performance Aircraft," *Aeronautical Research Council, R&M 2557* (1951); cited by Ref. 3.
7. Berkovitz, L. D., "On Control Problems with Bounded State Variable," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 5, no. 3 (1962), pp. 488-498.
8. Hacker, T., "Some Thoughts on the Disturbed Motion of VTOL Aircrafts," *Rev. Mécan. Appl.*, Acad. RPR, vol. 7, no. 3 (1962), pp. 433-447.
9. ———, "Problems of Stability of VTOL Aircrafts in Hovering Flight," *Rev. Mécan. Appl.*, Acad. RPR, vol. 7, no. 2 (1962), pp. 225-239.
10. ———, "On the Longitudinal Stability of an Aircraft with Automatic Pilot," *Rev. Mécan. Appl.*, Acad. RPR, vol. 7, no. 4 (1962), pp. 673-692.
11. Halanay, A., *Teoria calitativa a ecuatiilor diferentiale* (Théorie qualitative des équations différentielles, en roumain), Ed. Acad. RPR, 1963.
12. Hacker, T., "Stability of Partially Controlled Motions of an Aircraft," *J. Aerospace Sci.*, vol. 28, no. 1 (1961), pp. 15-27.
13. Krasovski, N. N., *Nekotorye zadatchi teorii oustroïtchivosti dvijenia*, Fizmatgiz, Moscow, 1959 (English translation, *Some Problems in the Theory of Stability of Motion* (Stanford: Stanford U. P., 1962).